ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

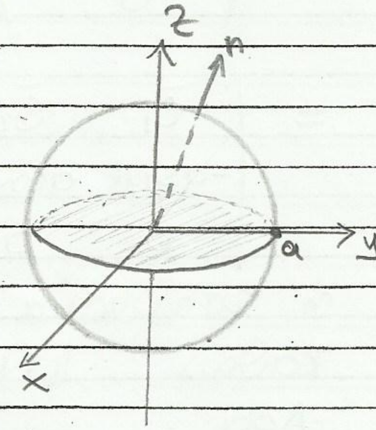
1) Επιφάνεια σφαίρας

Έστω η μοναδιαία σφαίρα με ακτίνα $a>0$ και εξίσωση $x^2+y^2+z^2=a^2$. Μια παραμέτρισή της είναι η εξής:

$$r(\varphi,\theta)=(a\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ a\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ a\cdot\cos\varphi)^{\tau} \text{ με } \begin{cases} 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

όπου,

$$N(r(\varphi,\theta))=\frac{\partial r(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}\times\frac{\partial r(\varphi,\theta)}{\partial\theta}=$$



$$=\begin{pmatrix} a\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta \\ a\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ -a\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -a\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ a\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a\cdot\cos\varphi\cos\theta & a\cos\varphi\cdot\sin\theta & -a\sin\varphi \\ -a\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta & a\sin\varphi\cdot\cos\theta & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(a^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos\theta,\ a^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\sin\theta,\ a^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^{\tau}$$

οπότε,

$$\|N(r(\varphi,\theta))\|^2=a^4\cdot\sin^2\varphi \Rightarrow \|N(r(\varphi,\theta))\|=a^2\cdot\sin\varphi$$

Γνωστό ότι το κάθετο διάνυσμα είναι:

$$N(r(\varphi,\theta))=(a^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos\theta,\ a^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\sin\theta,\ a^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^{\tau}$$

ή ισοδύναμα

$$N(r(\varphi,\theta))=(\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ \sin\varphi\cdot\sin\theta,\ \cos\varphi)$$

καθώς, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι το εξής

$$n(r(\varphi,\theta))=\frac{N(r(\varphi,\theta))}{\|N(r(\varphi,\theta))\|}=\frac{(\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ \sin\varphi\cdot\sin\theta,\ \cos\varphi)}{a^2\cdot\sin\varphi}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)=\frac{1}{a^2}\cdot(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \mathrm{ctg}\varphi)$$

στην περίπτωση όπου $\|N(r(\varphi,\theta))\|\neq 0$

2) Επιφάνεια Κυλίνδρου:

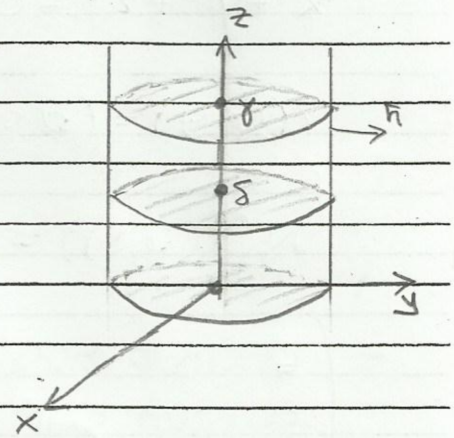
Έστω ο κύλινδρος $x^2+y^2=a^2$, όπου $\delta \le z \le \gamma$

Μια παραμετρική του είναι η εξής

$$r(t,z)=(a\cdot\cos t,\ a\cdot\sin t,\ z) \quad \text{με} \quad \begin{cases} t\in[0,2\pi] \\ z\in[\delta,\gamma] \end{cases}$$

όπου

$$N(r(t,z))=\frac{\partial r(t,z)}{\partial t}\times\frac{\partial r(t,z)}{\partial z}=$$



$$=\begin{pmatrix} a\cdot(-\sin t) \\ a\cdot\cos t \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=$$

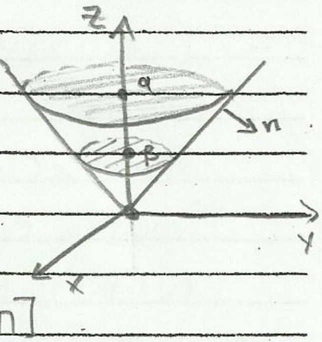
$$=\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -a\sin t & a\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a\cdot\cos t,\ a\sin t,\ 0).$$

ή ισοδύναμα σε πιο απλή μορφή: $N(r(t,z))=(\cos t,\sin t,0)$

καθώς $\|N(r(t,z))\|=1$

Άρα,

$$n(r(t,z))=\frac{N(r(t,z))}{\|N(r(t,z))\|}=(\cos t,\ \sin t,\ 0)$$



3) Κωνική Επιφάνεια

Έστω ο κώνος $z^2=x^2+y^2$, $0\le\beta\le z\le a$

Μια παραμετρική του είναι η εξής:

$$r(t,z)=(z\cos t,\ z\cdot\sin t,\ z) \quad \text{με} \quad \begin{cases} t\in[0,2\pi] \\ z\in[\beta,a] \end{cases}$$

όπου όμοια,

$$N(r(t,z))=(z\cdot\cos t,\ z\sin t,\ -z)\overset{\text{ισοδύναμο}}{=}(\cos t,\ \sin t,\ -1)$$

και $\|N(r(t,z))\|=z\sqrt{2}$

Άρα,

$$n(r(t,z))=\frac{(\cos t,\sin t,-1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

4) ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ:

Έστω η επιφάνεια $z = f(x,y)$ με $(x,y) \in D$

Μια παραμέτρηση της επιφάνειας είναι η εξής:

$$\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y)) \quad , \forall (x,y) \in D$$

όπου

$$N(\varphi(x,y)) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1 \right) = \left(-\nabla \varphi(x,y), 1 \right)$$

(Το κάθετο διάνυσμα)

Ενώ το ορθοκανονικό διάνυσμα είναι το εξής:

$$n(\varphi(x,y)) = \frac{N(\varphi(x,y))}{\|N(\varphi(x,y))\|} = \frac{(-\nabla \varphi(x,y), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi(x,y)\|}}$$